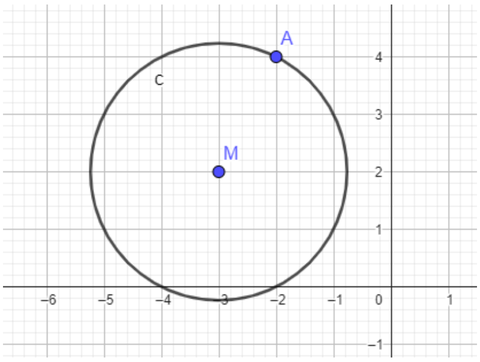
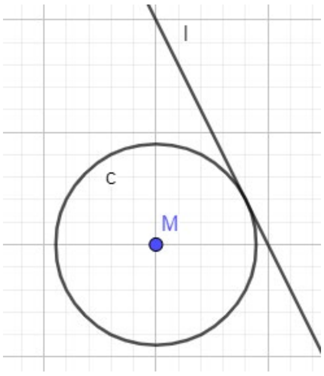
Vier raaklijnproblemen – opdrachten

Merk op: de kaders bij 3. en 4. zijn niet groot genoeg voor de hele uitwerking, alleen voor het antwoord.



1. Gegeven is de cirkel $c: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$.
   Ook is gegeven het punt $A(-2,4)$ op c.

   Stel een vergelijking op van de raaklijn k door A aan c.

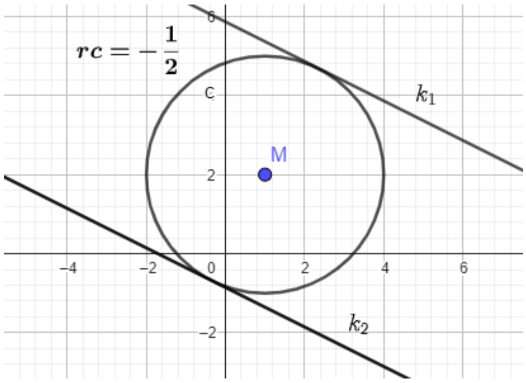


2. Gegeven is het middelpunt $M(-1,3)$ van de cirkel c en de lijn $l: y = -2x + 2$ die de cirkel raakt.

   Stel een vergelijking op van de cirkel c.

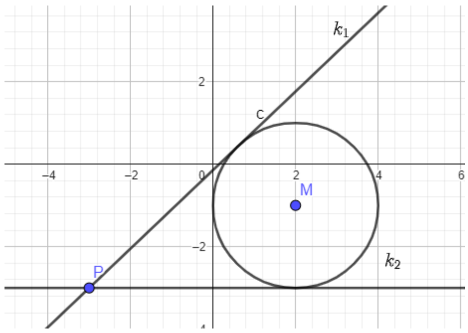
3. Gegeven is de cirkel *c* met $M(1,2)$ en $r = 3$. De raaklijnen k_1 en k_2 aan de cirkel hebben richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$.

   Stel vergelijkingen op van de raaklijnen k_1 en k_2.

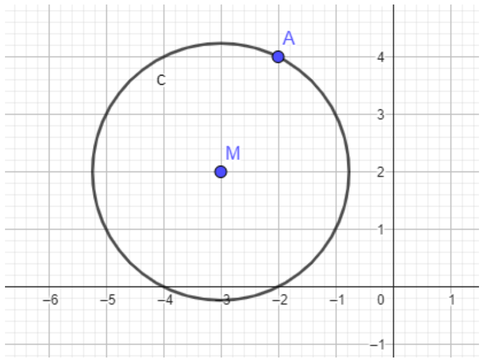


4. Gegeven is de cirkel *c* met $M(2,-1)$ en $r = 2$ en een punt $P(-3,-3)$ buiten de cirkel.

   Stel vergelijkingen op van de lijnen k_1 en k_2 door P die raken aan de cirkel.



Vier raaklijnproblemen- uitwerkingen

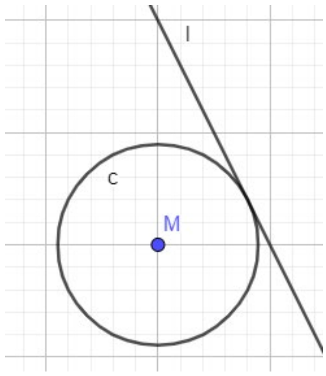


1. Gegeven is de cirkel $c: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$.
   Ook is gegeven het punt $A(-2{,}4)$ op c.

   Stel een vergelijking op van de raaklijn k door A aan c.

$\vec{n}_k = \vec{AM} = \vec{m} - \vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}\text{dus } k: x + 2y = c \\ \text{door } A(-2,4)\end{array}\right\} \; k: x + 2y = 6$



2. Gegeven is het middelpunt $M(-1{,}3)$ van de cirkel c en de lijn $l: y = -2x + 2$ die de cirkel raakt.

   Stel een vergelijking op van de cirkel c.

$l: -2x - y + 2 = 0$

$r = d(M, l) = \dfrac{|-2 \cdot -1 - 3 + 2|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}}$

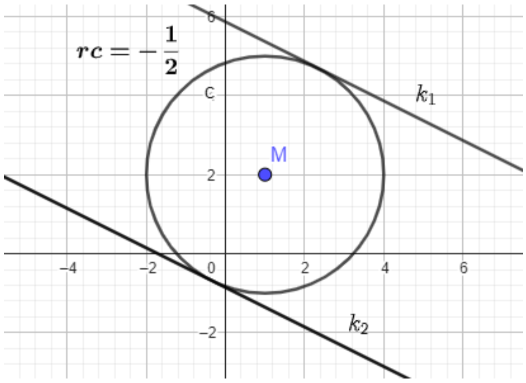
$= \dfrac{|2 - 3 + 2|}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}\sqrt{5}$

Dus $c: (x+1)^2 + (y-3)^2 = \dfrac{1}{5}$

3. Gegeven is de cirkel c met $M(1,2)$ en $r = 3$. De raaklijnen k_1 en k_2 aan de cirkel hebben richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$.

Stel vergelijkingen op van de raaklijnen k_1 en k_2.



$k: y = -\frac{1}{2}x + b \qquad k: \frac{1}{2}x + y - b = 0$

$d(M,k) = r = 3$

$$d(M,k) = \frac{|\frac{1}{2}\cdot 1 + 2 - b|}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (1)^2}} = 3$$

$$\frac{|2\frac{1}{2} - b|}{\sqrt{1\frac{1}{4}}} = 3$$

$3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

$$|2\tfrac{1}{2} - b| = 3\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

$$|2\tfrac{1}{2} - b| = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$2\tfrac{1}{2} - b = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{5} \ \vee\ 2\tfrac{1}{2} - b = -1\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

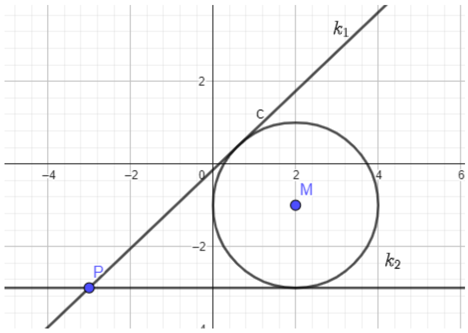
$$b = 2\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{5} \ \vee\ b = 2\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Dus $k_1: y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sqrt{5}$

en

$k_2: y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}\sqrt{5}$

4. Gegeven is de cirkel c met $M(2, -1)$ en $r = 2$ en een punt $P(-3, -3)$ buiten de cirkel.



Stel vergelijkingen op van de lijnen k_1 en k_2 door P die raken aan de cirkel.

$$k: y = ax + b \quad \text{door } (-3,-3) \quad \begin{cases} -3 = -3a + b \\ b = 3a - 3 \end{cases}$$

$$\text{dus } \quad k: y = ax + 3a - 3$$

$$ax - y + 3a - 3 = 0$$

$$d(k, M) = \frac{|a \cdot 2 - -1 + 3a - 3|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\frac{|2a + 1 + 3a - 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$$

$$|5a - 2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$25a^2 - 20a + 4 = 4(a^2 + 1)$$

$$21a^2 - 20a = 0$$

$$a(21a - 20) = 0$$

$$a = 0 \lor 21a = 20$$

$$a = \frac{20}{21}$$

Dus $k_1: y = -3$

$k_2: y = \frac{20}{21}x + 3 \cdot \frac{20}{21} - 3$